

## Лекция № 12

### **Переходные процессы в линейных цепях и методы их расчета**

#### Учебные вопросы

1. Понятие о переходных процессах. Законы коммутации.
2. Алгоритм классического метода расчета переходных процессов.
3. Переходные процессы в простых цепях первого порядка.
4. Применение преобразования Лапласа к анализу цепей.
5. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.
6. Анализ переходных процессов операторным методом.

#### **1. Понятие о переходных процессах. Законы коммутации.**

При изучении свойств электрических цепей переменного тока были рассмотрены режимы работы таких цепей - активно-индуктивный, активно-емкостный и режим резонанса. Введем понятие режима работы в общем случае для любой электрической цепи.

*Режим работы электрической цепи* - это состояние цепи в данный момент или интервал времени, характеризующееся конкретными значениями параметров и законами изменения электрических величин.

*Установившийся режим* в электрической цепи - режим, при котором ЭДС, напряжения и токи в цепи являются постоянными или периодическими.

*Переходный режим (процесс)* в электрической цепи - электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

Изменение режима работы происходит в процессе коммутации цепи.

*Коммутацией* цепи называется совокупность причин, вызывающих изменение условий работы цепи и ее переход от одного установившегося режима к другому.

Примеры коммутации:

- подключение цепи к источнику питания;
- отключение цепи от питающей сети;
- резкое изменение параметров ( $R, L, C$ ) цепи и др.

При исследовании переходных процессов начало отсчета времени берется от момента коммутации ( $t = 0$ ). Момент времени непосредственно перед мгновенной коммутацией обозначается «0-», а сразу после мгновенной коммутации «0+».

Переходные процессы в электрических цепях подчиняются двум законам коммутации.

*Первый закон коммутации* гласит: в любой ветви с индуктивностью ток и потокосцепление в момент коммутации сохраняют те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и далее начинают изменяться именно с этих значений:

$$\left. \begin{aligned} i(0-) &= i(0) = i(0+); \\ \psi(0-) &= \psi(0) = \psi(0+). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Действительно, напряжение на индуктивном элементе определяется выражением:

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Если для ветви с индуктивностью допустить, что в момент коммутации ток изменяется скачком, то напряжение будет бесконечно большим, что невозможно.

*Второй закон коммутации* гласит: в любой ветви с емкостью напряжение на емкости и электрический заряд в момент коммутации сохраняют те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и далее начинают изменяться именно с этих значений:

$$\left. \begin{aligned} u(0-) &= u(0) = u(0+); \\ q(0-) &= q(0) = q(0+). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Действительно, ток в емкостном элементе определяется выражением:

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Если допустить, что в момент коммутации напряжение на емкостном элементе изменяется скачком, то ток будет бесконечно большим, что также невозможно.

С энергетической точки зрения невозможность мгновенного изменения тока и напряжения объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в индуктивном и емкостном элементах энергии (энергии магнитного поля и энергии электрического поля).

Переходные процессы в электрических цепях необходимо учитывать, поскольку:

- переходные процессы часто сопровождаются появлением на отдельных участках цепи повышенных величин напряжений и токов (аварии и короткие замыкания), опасных для жизни;

- в ряде устройств переходные процессы затухают очень медленно и на элементах цепи долгое время сохраняются большие величины зарядов и напряжений, опасные для жизни (телевизор, разомкнутый кабель высоковольтной линии электропередачи и др.);

- переходные режимы для ряда электротехнических устройств являются нормальными рабочими режимами (исполнительный электропривод систем автоматики др.);

- длительность переходных процессов непосредственно влияет на выполнение боевой задачи (быстродействие следящих систем и систем управления выхода на рабочие режимы моторов гироскопов, гироавтопилотов, ампульных бортовых батарей и др.)

## 2. Алгоритм классического метода расчета переходных процессов.

Наиболее наглядным методом расчета переходных процессов является классический метод. В основе классического метода лежит составление системы дифференциальных уравнений цепи и сведения их к одному уравнению, на основе которого определяется требуемая переходная электрическая величина.

Пусть дана последовательная  $RLC$ -цепь, которая подключается к сети с постоянным напряжением  $U$  (рис. 1).

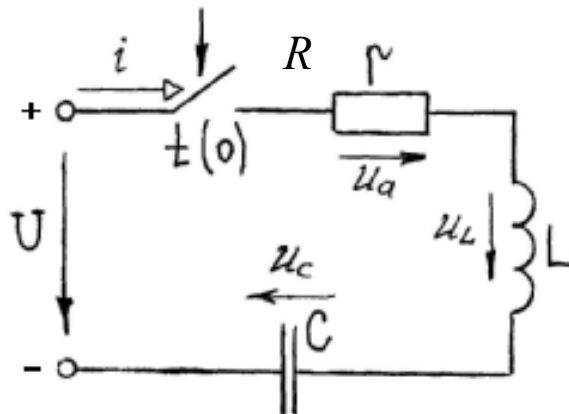


Рисунок 1. Подключение  $RLC$ -цепи к источнику постоянного напряжения

Определим переходный ток, т.е. ток в цепи, имеющий место во время переходного процесса.

На основе законов Ома и Кирхгофа для состояния цепи после коммутации записывается следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_R + u_L + u_C &= U; \\ u_R &= R i; \\ u_L &= L \frac{di}{dt}; \\ u_C &= \frac{1}{C} \int i dt. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставив выражения для мгновенных значений напряжений на элементах в первое уравнение, получим:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U. \quad (4)$$

Таким образом, система уравнений (3) сводится к одному неоднородному интегро-дифференциальному уравнению. Полным интегралом (решением) данного уравнения является *переходный ток*  $i$ , который может быть представлен в виде суммы двух слагаемых:

$$i = i_y + i_{св}.$$

где  $i_y$  - установившийся ток;  
 $i_{св}$  - свободный ток.

*Установившийся ток* - периодический или постоянный электрический ток, устанавливающийся в электрической цепи после окончания переходного процесса. Его существование обусловлено энергией подключенного к цепи источника питания.

*Свободный ток* - электрический ток, равный разности переходного и установившегося токов, он существует в цепи только в течение времени переходного процесса и обусловлен запасом энергии в реактивных элементах при отключенных источниках питания цепи.

По мере уменьшения этого запаса вследствие превращения энергии электромагнитного поля в тепло на активных сопротивлениях цепи уменьшается и совсем исчезает свободный ток.

#### Определение установившегося тока.

Составляющая  $i_y$  есть частное решение неоднородного уравнения вида:

$$R i_y + L \frac{di_y}{dt} + \frac{1}{C} \int i_y dt = U. \quad (5)$$

В математике эту составляющую определяют методом подбора функции по виду правой части таким образом, чтобы ее подстановка в уравнение обращала последнее в тождество.

В электротехнике такой подбор упрощается, так как установившийся ток может быть найден на основе понимания физических процессов в цепи или обычным расчетом цепи в установившемся режиме ее работы.

### Определение свободного тока.

Составляющая  $i_{св}$  есть решение однородного уравнения:

$$R i_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{св} dt = 0 . \quad (6)$$

Таким образом, алгоритм расчета переходных процессов в простых электрических цепях классическим методом включает в себя следующие этапы:

- составление схемы замещения цепи и определение начальных условий коммутации.
- составление системы дифференциальных уравнений на основе законов Ома и Кирхгофа для схемы цепи, образованной после коммутации;
- преобразование полученной системы уравнений к одному неоднородному уравнению;
- решение неоднородного уравнения, то есть нахождение переходной функции тока или напряжения по установившейся и свободной составляющим;
- анализ характера и параметров переходного процесса в цепи по графикам зависимостей переходных токов и напряжений от времени.

## **3. Переходные процессы в простых цепях первого порядка.**

Рассмотрим применение классического метода расчета переходных процессов на примере простейшей схемы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка.

### Подключение $RL$ -цепи к источнику постоянного напряжения.

Катушка индуктивности с известными параметрами - активным сопротивлением обмотки  $R$  и ее индуктивностью  $L$  - подключается к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис. 2). До подключения цепи к источнику ток в цепи отсутствовал.

Определить переходный ток в цепи.

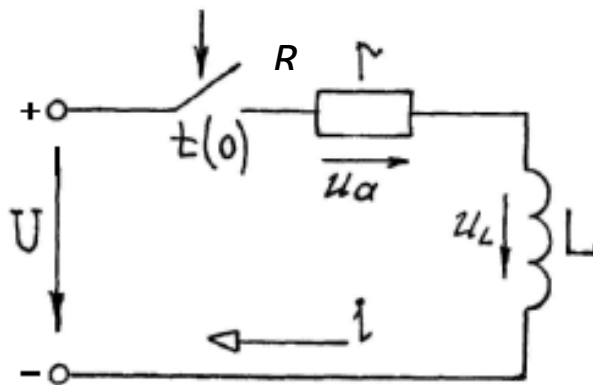


Рисунок 2. Схема замещения  $RL$ -цепи

По условию начальные условия коммутации нулевые. Следовательно по 1-му закону коммутации:

$$i(0) = i(0-) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений, описывающих процессы в цепи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_a + u_L &= U; \\ u_a &= R i; \\ u_L &= L \frac{di}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Эта система сводится к одному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$R i + L \frac{di}{dt} = U. \quad (8)$$

Переходный ток, являющийся решением уравнения (4.8), определяется как сумма установившейся и свободной составляющих тока:

$$i = i_y + i_{св}.$$

Установившийся ток в рассматриваемой цепи - есть постоянный ток по окончании переходного процесса, то есть

$$i_y = I = U/R.$$

Это легко проверить подстановкой в уравнение (4.8). При подстановке уравнение обращается в тождество:

$$R \cdot \frac{U}{R} + L \frac{d}{dt} \left( \frac{U}{R} \right) = U; \quad U \equiv U.$$

Свободный ток определяется интегрированием однородного дифференциального уравнения:

$$R i_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} = 0.$$

Из курса математики известно, что решение таких уравнений имеет вид:

$$i_{CB} = A e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (9)$$

где  $A$  - постоянная интегрирования.  
 $\tau = L/R$  - постоянная времени цепи.

Функция переходного тока с учетом найденных функций его составляющих  $i_y$  и  $i_{CB}$  имеет вид:

$$i = \frac{U}{R} + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется из начального условия коммутации:

$$i(0) = \frac{U}{R} + A e^{-\frac{0}{\tau}} = 0.$$

Отсюда

$$A = -\frac{U}{R}.$$

Следовательно, функции свободного и переходного токов соответственно примут вид:

$$i_{CB} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (10)$$

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (11)$$

Переходное напряжение на активном сопротивлении:

$$u_a = U (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Переходное напряжение на индуктивности:

$$u_L = U e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Анализ характера переходного процесса может быть выполнен как непосредственно по уравнениям переходных тока и напряжений, так и по графикам этих функций (рис. 3).

По результатам анализа уравнений и графиков можно сделать следующие выводы о характере переходного процесса при подключении последовательной  $RL$ -цепи под постоянное напряжение:

а) переходный ток в цепи и переходные напряжения на ее элементах изменяются по экспоненциальным законам;

б) переходный ток в цепи в момент коммутации не имеет скачка и после коммутации начинает нарастать плавно от значения, предшествовавшего непосредственно моменту коммутации;

в) в цепи наблюдается мгновенный скачок напряжения на индуктивности за счет проявления индуктированной ЭДС в обмотке, пропорциональной скорости изменения тока;

г) от постоянной времени цепи  $\tau = L/R$  зависят крутизна кривых и время их нарастания до установившегося значения, следовательно, от этого параметра зависит и время переходного процесса.

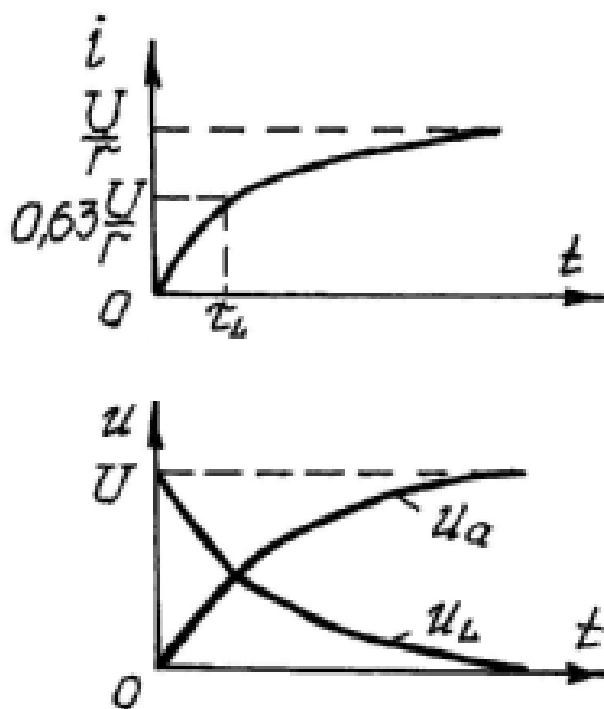


Рисунок 3. Переходные токи и напряжения при подключении  $RL$ -цепи к источнику постоянного напряжения

Постоянная времени цепи в соответствии с ГОСТ определяется как величина, характеризующая электрическую цепь, в которой свободный ток является экспоненциальной функцией времени, равная интервалу времени, в течение которого этот ток убывает в  $e$ -раз (где  $e$  - основание натурального логарифма).

$$i_{CB}(\tau) = -\frac{U}{R} e^{-\frac{\tau}{\tau}} = -\frac{U}{R} e^{-1} \approx -0.37 \cdot \frac{U}{R}.$$



За то же самое время переходный ток в цепи  $i = I + i_{CB}$  достигнет значения  $i(\tau) = 0.63 \cdot U / R$  (рис.3).

Обычно на практике длительность переходного процесса в цепи оценивают с помощью  $\tau$  следующим соотношением:

$$t_{п.п} = (4...6) \tau.$$

Для сокращения времени переходного процесса нужно уменьшить  $\tau$ , что достигается уменьшением индуктивности цепи или увеличением ее электрического сопротивления.

#### 4. Применение преобразования Лапласа к анализу цепей.

Классический метод расчета переходных процессов с физической точки зрения является наиболее наглядным, однако он находит применение только в тех случаях, когда порядок получаемого неоднородного дифференциального уравнения не превышает двух. Для более сложных задач решение классическим методом крайне затруднительно.

Для расчета переходных процессов в линейных цепях, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка разработан специальный *операторный метод*. Он основан на известном способе интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа.

Этот способ впервые был показан русским математиком М.Е. Ващенко-Захарченко в 1862 году. В конце XIX века английский ученый О.Хевисайд впервые применил операторный метод к расчету переходных процессов в электрических цепях.

Сущность операторного метода заключается в том, что функциям переходных токов, напряжений и ЭДС  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$  называемым *оригиналами* ставят в соответствие функции  $I(p)$ ,  $U(p)$ ,  $E(p)$  некоторого параметра  $p$ , называемые *изображениями* исходных функций.

Указанное сопоставление производится по формуле прямого преобразования Лапласа:

$$I(p) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt. \quad (12)$$

Соответствие между функциями  $I(p)$  и  $i(t)$  в краткой форме записывается следующим образом:

$$I(p) = L \{i(t); p\}.$$

При этом функции  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$  должны удовлетворять условиям Дирихле, что на практике почти всегда выполняется.

Отметим некоторые известные свойства преобразования Лапласа, называемые также теоремами, которые используются при расчете переходных процессов .

**А. Теорема о сложении:**

$$\mathcal{L} \{ a_1 i_1(t) + a_2 i_2(t); p \} = a_1 \mathcal{L} \{ i_1(t); p \} + a_2 \mathcal{L} \{ i_2(t); p \}, \quad (13)$$

где  $a_1, a_2$  - постоянные коэффициенты.

**Б. Теорема об интегрировании:**

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t i(t) dt; p \right\} = \frac{1}{p} I(p). \quad (14)$$

**В. Теорема о дифференцировании:**

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{di(t)}{dt}; p \right\} = pI(p) - i(0), \quad (15)$$

где  $i(0)$  в электротехнике - значение тока в момент коммутации.

Рассмотренные свойства преобразования Лапласа обуславливают следующий результат: замена реальных переходных токов и напряжений их изображениями (подобно той, которая осуществляется при расчете цепей синусоидального тока в установившихся режимах символическим методом) приводит к *алгебраизации* дифференциальных уравнений цепи, отражающих законы Ома и Кирхгофа.

При этом данные уравнения будут относиться к *операторной схеме замещения цепи* (аналогично комплексной схеме замещения в символическом методе). Расчет операторной схемы замещения выполняется методами, аналогичными методам расчета цепей постоянного тока, в результате чего находятся операторные токи и напряжения. Реальные переходные токи и напряжения (оригиналы) определяются по найденным изображениям различными способами, например с помощью таблиц *обратного преобразования Лапласа* [3].

В таблице 1 приведены примеры оригиналов и изображений некоторых функций.

Таблица 1

Изображения	Оригиналы
$\frac{A}{p}$	$A$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{\lambda p + \mu}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{\alpha \lambda - \mu}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} + \frac{\beta \lambda - \mu}{\beta - \alpha} e^{-\beta t}$

В таблице 1 параметры  $A$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  - константы, не зависящие от переменной  $t$ .

## 5. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.

С помощью преобразования Лапласа (12), учитывая свойства (13)-(15), получим соотношения между изображениями напряжения и тока (операторными напряжением и током) для резистивного, индуктивного и емкостного элементов.

Изображение напряжения  $u_a(t) = R i(t)$  на резистивном элементе:

$$U_a(p) = L \{ R i(t); p \} = R \int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt = R I(p). \quad (16)$$

Изображение напряжения  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$  на индуктивном элементе:

$$U_L(p) = L \left\{ L \frac{di(t)}{dt}; p \right\} = L p I(p) - L i(0). \quad (17)$$

Напряжение на емкостном элементе определяется выражением:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

В более полной форме (с указанием пределов интегрирования по времени) это выражение примет вид:

$$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

Таким образом, изображение напряжения на емкостном элементе:

$$U_c(p) = L \left\{ \frac{1}{C} \int i(t) dt; p \right\} = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_c(0)}{p}. \quad (18)$$

Таким образом операции дифференцирования и интегрирования оригиналов сводятся соответственно к алгебраическим операциям умножения и деления их изображений на параметр  $p$ .

Рассмотрим последовательную  $RLC$ -цепь (рис.4), для которой справедливо уравнение (4):

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U.$$

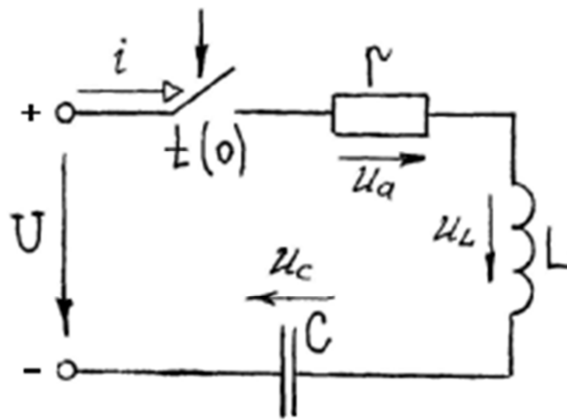


Рисунок 4. Подключение  $RLC$ -цепи к источнику постоянного напряжения

С учетом соотношений (16)-(18) и таблицы 1 это уравнение может быть записано в *операторной форме*:

$$RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_c(0)}{p} = \frac{U}{p}.$$

Вместо дифференциального уравнения получено алгебраическое уравнение относительно операторного тока  $I(p)$ . Выразим из этого уравнения  $I(p)$ :

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p} + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{r + Lp + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{U}{p} + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{Z(p)}, \quad (19)$$

где  $Z(p) = R + Lp + 1/(pC)$  - полное операторное сопротивление цепи.

Заметим, что структура полного операторного сопротивления цепи аналогична структуре полного комплексного сопротивления той же цепи, если  $p$  заменить на  $j\omega$ .

Уравнение (19) называется *законом Ома в операторной форме* при ненулевых начальных условиях, то есть если выполняются условия:

$$i(0) \neq 0, u_c(0) \neq 0.$$

Слагаемое  $Li(0)$  в знаменателе (4.20) представляет собой ЭДС, обусловленную запасом энергии магнитного поля в индуктивной катушке вследствие протекания через нее тока  $i(0)$ .

Слагаемое  $u_c(0)/p$  представляет собой ЭДС, обусловленную запасом энергии электрического поля в конденсаторе вследствие наличия на нем напряжения  $u_c(0)$ .

При нулевых начальных условиях:

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p}}{Z(p)}.$$

В общем случае, когда напряжение источника может быть переменным это уравнение примет вид:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (20)$$

Переход от реальных токов и напряжений к их изображениям в операторной форме означает переход от схемы цепи, изображенной на рис. 1 и описываемой уравнением (4) к операторной схеме замещения (рис. 5), описываемой уравнением (19).

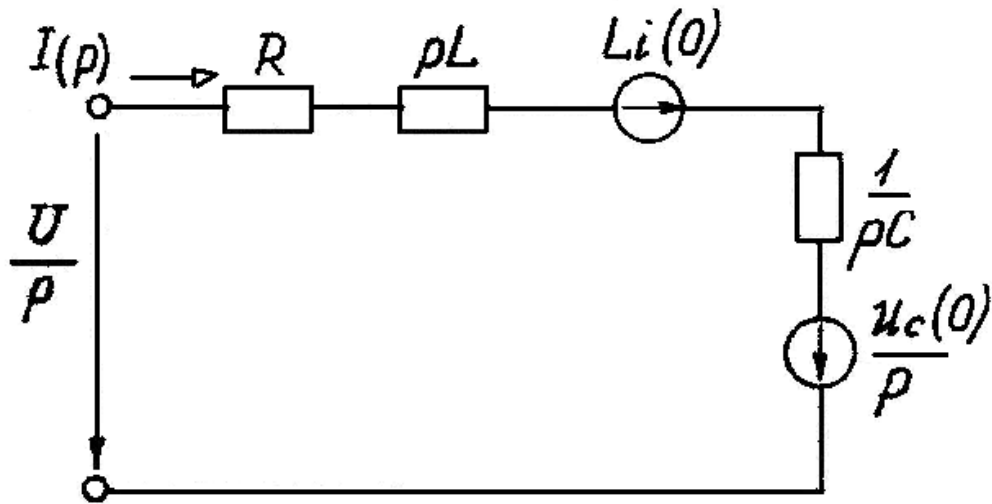


Рисунок 5. Операторная схема замещения  $RLC$ -цепи

Для расчета переходных процессов в сложных цепях кроме закона Ома в форме (19) или (20) необходимо составлять уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. В переходных режимах любая цепь является цепью переменного тока, для которой, как было указано в разделе 3, эти законы справедливы только для мгновенных значений реальных токов и напряжений.

Рассмотрим уравнение по первому закону Кирхгофа для некоторого узла электрической цепи, в котором сходятся токи  $i_1, \dots, i_k$ :

$$\sum i_k = 0.$$

Применим преобразование Лапласа к этому выражению. Тогда, с учетом свойства (13), получим:

$$L \{ \sum i_k(t); p \} = \sum L \{ i_k(t); p \} = \sum I_k(p) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) выражает собой *первый закон Кирхгофа в операторной форме*.

Аналогично можно получить выражение и для второго закона Кирхгофа в операторной форме. Для некоторого контура электрической цепи, содержащего элементы с  $R_1, \dots, R_k, L_1, \dots, L_k, C_1, \dots, C_k$ , в ветвях которого протекают токи  $i_1, \dots, i_k$  и действуют ЭДС  $e_1, \dots, e_k$  получаем:

$$\sum E_k(p) = \sum [I_k(p)Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p}], \quad (22)$$

где  $Z_k(p) = R_k + L_k p + 1/(pC_k)$ .

Уравнение (22) выражает собой *второй закон Кирхгофа в операторной форме* при ненулевых начальных условиях. При нулевых начальных условиях уравнение (22) принимает вид:

$$\sum E_k(p) = \sum I_k(p) Z_k(p). \quad (23)$$

Заметим, что формулировки законов электрических цепей и вид расчетных соотношений при нулевых начальных условиях в операторной и символической формах записи аналогичны.

Используя законы Ома и Кирхгофа в операторной форме и методы расчета цепей, вытекающие из этих законов (метод контурных токов, метод узловых напряжений и др.), можно найти изображение искомых переходных токов или напряжений. Затем возникает обратная задача операторного метода - найти по известному изображению соответствующий ему оригинал.

## **6. Анализ переходных процессов операторным методом.**

Расчет переходного процесса операторным методом производится по следующему алгоритму:

- 1) вычерчивается обычная исходная схема замещения цепи и определяются начальные условия коммутации;
- 2) все известные электрические величины и параметры изображаются в операторной форме и осуществляется переход к операторной схеме замещения цепи;
- 3) на основе законов Ома, Кирхгофа в соответствии с выбранным методом расчета для цепи после ее коммутации составляется система операторных уравнений с учетом начальных условий;
- 4) находится решение полученной системы операторных уравнений, то есть определяются операторные токи или напряжения;
- 5) найденные изображения искомых переходных токов и напряжений преобразуются к виду, удобному для определения оригиналов;
- 6) производится анализ характера переходного процесса.

Рассмотрим применение операторного метода расчета переходных процессов на примере схемы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка.

### Подключение $RLC$ -цепи к источнику постоянного напряжения.

Рассмотрим последовательную  $RLC$ -цепь (рис.4). До коммутации ток в цепи отсутствовал, конденсатор разряжен. Цепь подключается к источнику постоянного напряжения  $U$ . Определим операторным методом функции переходного тока и напряжения на элементах цепи.

Начальные условия коммутации нулевые:  $i(0) = 0$ ,  $u_c(0) = 0$ .

Для данной цепи после коммутации справедливо уравнение (3), которое в операторной форме при нулевых начальных условиях примет вид:

$$R I(p) + L p I(p) + \frac{1}{pC} I(p) = \frac{U}{p}.$$

Выразим операторный ток:

$$I(p) = \frac{U}{p} \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{U}{L}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

Приведем изображение к табличному виду (см. табл.1):

$$I(p) = \frac{\lambda p + \mu}{(p + \alpha)(p + \beta)}$$

где  $\lambda = 0$ ;

$\mu = U/L$ ;

$\alpha, \beta$  - взятые с противоположным знаком корни уравнения

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (24)$$

Как известно, корни квадратного уравнения определяются выражениями:

$$\alpha = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}};$$

$$\beta = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}.$$

В общем случае, оригинал переходного тока:

$$i(t) = \frac{U}{L(\beta - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

Переходные напряжения на элементах:



$$u_a(t) = Ri(t) = \frac{UR}{L(\beta - \alpha)}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t});$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{U}{(\beta - \alpha)}(-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t})$$

$$u_C(t) = U - u_a - u_L = U \left[ 1 - \frac{1}{(\beta - \alpha)}(-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}) \left( \frac{R}{L} + 1 \right) \right].$$

Характер переходных процессов в цепи зависит от вида корней уравнения (24). Рассмотрим три возможных случая.

### **1. Корни вещественные и разные.**

Этот вариант имеет место при  $\frac{R^2}{L^2} > \frac{4}{LC}$ .

Такое соотношение возможно, если выполняется условие:

$$R > R_{KP} = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

где  $R_{KP}$  - критическое сопротивление.

Переходный процесс при данном варианте называется *апериодическим зарядом конденсатора*.

Графики переходных токов и напряжений изображены на рис. 5. Отличительной особенностью такого переходного процесса является то, что ток и напряжение на конденсаторе не изменяют свои знаки. При этом напряжение на конденсаторе монотонно возрастает до величины  $U$ , а ток первоначально плавно увеличивается до некоторого максимального значения, а затем спадает до нуля.

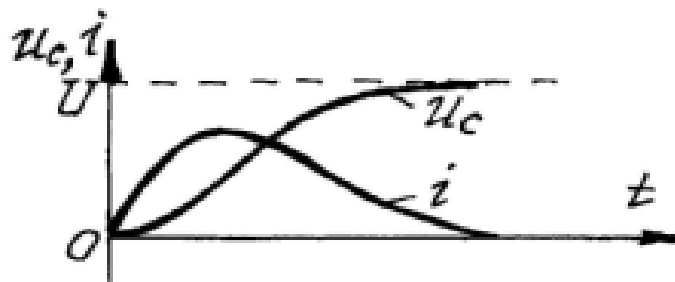


Рисунок 5. Апериодический заряд конденсатора

## 2.Корни вещественные и равные.

Этот вариант имеет место при  $\frac{R^2}{L^2} = \frac{4}{LC}$ .

В этом случае выполняется условие  $R = R_{KP}$ .

Переходный процесс при данном варианте называется *предельным апериодическим зарядом конденсатора*.

Графики переходных токов и напряжений примерно такие, как и для предыдущего случая.

## 3.Корни мнимые.

Этот вариант имеет место при  $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$ .

В этом случае выполняется условие  $R < R_{KP}$ .

Переходный процесс при данном варианте называется *колебательным зарядом конденсатора*.

Графики переходных величин изображены на рис. 6. Ток совершает затухающие колебания относительно нулевого значения. Напряжение  $u_c$  колеблется около своего установившегося значения  $U$ , не превышая величины  $2U$ . Амплитуды колебаний тока и напряжения уменьшаются по экспоненциальному закону.

Преимущества операторного метода, так же как и символического, особенно заметны при расчете сложных цепей.

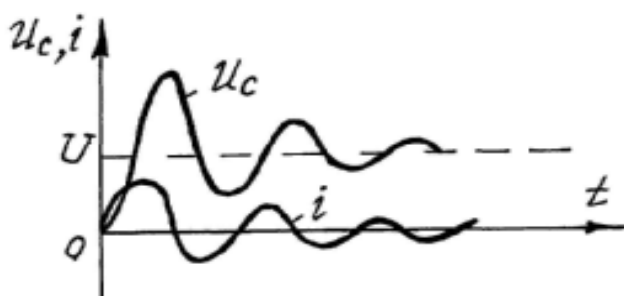


Рисунок .6. Колебательный заряд конденсатора

Операторный метод, являясь методом чисто алгебраическим, по сравнению с классическим методом более прост и универсален, что обеспечило его исключительно широкое применение в электротехнике, радиотехнике, теории автоматического управления.