Лекция №4.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Учебные вопросы

1. Содержание метода преобразования схем. Принцип эквивалентности преобразования.
2. Содержание метода непосредственного применения законов Кирхгофа.
3. Содержание метода контурных токов.
4. Содержание метода узловых потенциалов.

.

1. Содержание метода преобразования схем. Принцип эквивалентности преобразования

Метод преобразования - основной метод расчета простых электрических цепей. Кроме того, этот метод применяется и при расчете сложных цепей в рамках решения задачи.

Существо метода сводится к преобразованию схемы цепи к простой последовательной схеме, в которой можно применить закон Ома и определить один из токов. Затем, возвращаясь обратно к исходной схеме от последовательной схемы можно на основе закона Ома и законов Кирхгофа определить остальные токи.

Метод предполагает учет условий эквивалентности преобразования, которое подразумевает, что если какой-либо участок схемы преобразован к эквивалентному, то при таком преобразовании токи и напряжения на остальных частях схемы , не подвергшихся преобразованию, не должны измениться.

Неразветвленная электрическая цепь характеризуется тем, что на всех ее участках протекает один и тот же ток, а разветвленная содержит одну или несколько узловых точек, при этом на участках цепи протекают разные токи.

При расчетах неразветвленных и разветвленных линейных электрических цепей постоянного тока могут быть использованы различные методы, выбор которых зависит от вида электрической цепи.

При расчетах сложных электрических цепей во многих случаях целесообразно производить их упрощение путем свертывания, заменяя отдельные участки цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединениями сопротивлений одним эквивалентным сопротивлением с помощью метода эквивалентных преобразований (метода трансфигураций) электрических цепей.

Суть метода преобразований рассмотрим на примере цепи постоянного тока (рис.1). Пусть заданы сопротивления всех резистивных элементов цепи, величины

ЕДС и внутреннего сопротивления источника. Необходимо определить величину тока I в ветви с источником.

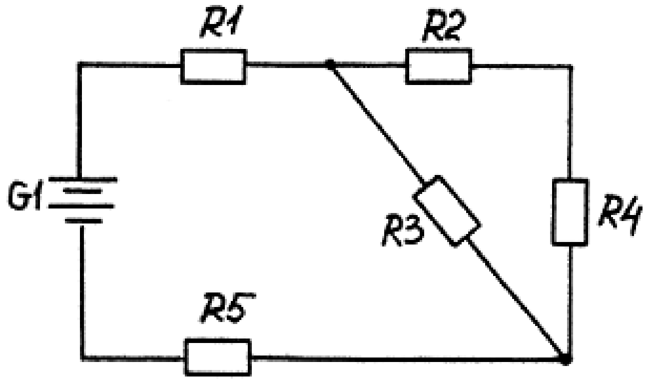

Рис. 1. Принципиальная схема цепи постоянного тока

Схема замещения цепи представлена на рис. 2.

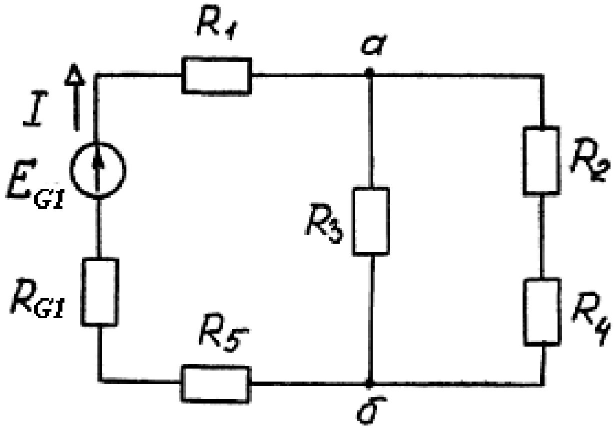

Рис. 2. Схема замещения цепи постоянного тока

Содержание метода преобразований заключается в преобразовании исходной цепи к простейшему виду (рис. 3) и расчет тока в такой цепи по закону Ома.

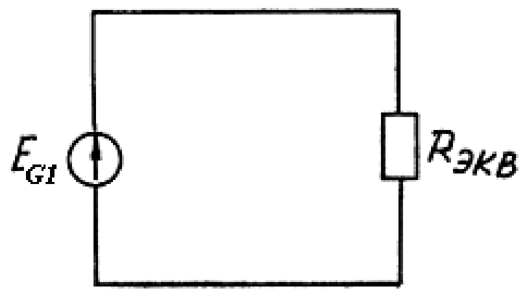

Рис. 3. Результат преобразования исходной схемы

Переход от исходной схемы (рис. 2) к простейшей (рис.3) осуществляется в данном случае на основе свойств последовательного и параллельного соединения резисторов.

Напомним, что если участок цепи содержит *последовательно* соединенные k резисторов с сопротивлениями R_k то общее сопротивление участка $R_{общ} = R_1+R_2+\ldots+R_k$.

Если же участок цепи содержит параллельно соединенные k резисторов с сопротивлениями R_k то общее сопротивление участка можно определить из соотношения:

$$1/R_{общ} = 1/R_1+1/R_2+\ldots+1/R_{\mathrm{k}}.$$

Для рассматриваемого примера сопротивление участка **а-б**:

$$1/R_{аб} = 1/(R_2+R_4) + 1/R_3.$$

Общее (эквивалентное) сопротивление всей цепи:

$$R_{экв} = R_1 + R_5 + R_{\mathrm{G1}}+ R_{аб}.$$

По закону Ома: $I = E_{G1}/ R_{экв}$.

При расчете цепей постоянного и переменного токов и, особенно, при расчете трехфазных электрических цепей применяется преобразование схемы типа «звезда» в схему типа «треугольник».

2. Содержание метода непосредственного применения законов Кирхгофа

Решение задач на расчет сложных цепей основывается на применении первого и второго законов Кирхгофа, которые наряду с законом Ома являются основными законами электрической цепи.

Законы Кирхгофа определяют распределение токов и напряжений в электрических цепях любой конфигурации.

Первый закон Кирхгофа. Рассматривая разветвленные электрические цепи (рис. **1**), состоящие из нескольких контуров, нам необходимо установить соотношения между токами, приходящими к любому узлу, и токами, уходящими от него. Как известно, из физической сущности электрического тока следует, что общее количество носителей тока, притекающее к узлу в течение некоторого промежутка времени, равно количеству носителей, утекающему от узла за то же время. Если предположить, что это положение не выполняется, то в узловой точке должно происходить накопление зарядов или убыль — утечка зарядов.

На практике эти явления не наблюдаются, следовательно, мы можем утверждать, что **сумма величин токов, притекающих к точке разветвления, равна сумме величин токов, утекающих от нее**.

Это положение и является формулировкой **первого** закона Кирхгофа.

Условимся токи, притекающие к точке разветвления, считать положительными, а токи, утекающие от нее, - отрицательными и сформулируем окончательно первый закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма величин токов в точке разветвления равна нулю.

$$\sum I = 0, \qquad (2\text{-}68\ \mathbf{1})$$

где Σ (сигма) - символ алгебраической суммы.

Второй закон Кирхгофа. Второй закон Кирхгофа связывает между собой э. д. с., действующие в любом замкнутом контуре, и падений напряжения на сопротивлениях, входящих в данный контур.

Исходя из принципа электрического равновесия, можно сделать логический вывод, что в установившемся режиме, когда токи в контуре не изменяются, все э. д. с, уравновешиваются падениями напряжения. В самом деле, если предположить, что сумма э. д. с. превышает сумму падений напряжения, то ток в цепи должен возрасти. Наоборот, если сумма падений напряжения превышает сумму э, д. е., ток должен уменьшиться.

отсюда

Таким образом, алгебраическая сумма э. д. с., действующих в любом замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех участках этого контура.

Это и есть формулировка второго закона Кирхгофа,

Математически второй закон Кирхгофа выражается формулой

$$\Sigma E = \Sigma I \cdot r. \qquad (\mathbf{2})$$

При составлении уравнения второго закона Кирхгофа необходимо учитывать направления токов и э. д. с. Для этого выбирают какое-либо направление обхода контура (обычно направление движения часовой стрелки) и считают положительными э. д. с., которые создают токи в направлении, совпадающем с направлением обхода и падения напряжения, создаваемые тока ми, направление которых совпадает с направлением обхода.

Применение законов Кирхгофа для расчета сложных цепей

Для каждой сложной цепи, пользуясь законами Кирхгофа, можно составить строго определенное число независимых друг от друга уравнений. Как будет показано ниже, это число всегда равно числу неизвестных токов в цепи.

Число уравнений находится в зависимости от числа ветвей ***(b)*** и числа узлов ***(у).***

Любая ветвь цепи характеризуется величиной э, д. с. (Е), действующей в ней, сопротивлением (R) и величиной тока (I).

Если в данной ветви действуют несколько э. д. с, и имеется несколько сопротивлений, то она характеризуется алгебраической суммой всех э, д. с. и суммой всех сопротивлений, т.е. опять-таки определенной (одной) э. д. с, и определенным (одним) сопротивлением.

Следовательно, сложная цепь, имеющая ***b*** ветвей, будет характеризоваться ***b*** - э. д. с., ***b*** -сопротивлениями и ***b*** -токами.

Используя первый закон Кирхгофа, можно составить (***у*** - 1) уравнений, связывающих между собой величины токов в ветвях. Таким образом, число уравнений на одно меньше, чем число всех узлов цепи. Это объясняется тем, что все токи, входящие в уравнение для узла ***у***, уже вошли в предыдущие уравнения.

Математически доказано, что число независимы уравнений, которое можно составить **для любой сложной цепи** по второму закону Кирхгофа будет равно

$$m = b - (y-1), \qquad (3)$$

где ***m***—число независимых уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа;

b — число ветвей;

у —число узлов.

При выборе контуров стараются по возможности подобрать такие» которые содержат меньшее число ветвей и э. д. с.

Общее число уравнений, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа для сложной цепи, состоящей из ветвей и узлов, будет равно числу ветвей.

Складывая число уравнений, составленных на основании первого закона 'Кирхгофа ***(у-1),*** с числом уравнений, составленных на основании второго закона Кирхгофа (*m*), получим

$$y-1+m = y-1+b-y+1 = b, \qquad (4)$$

Итак, если задана цепь из ***b*** ветвей и известны все э.д.с. и сопротивления, всегда можно составить ***b*** уравнений по числу неизвестных токов в ветвях.

Для решения задачи на расчет сложной цепи необходимо:

1, По схеме цепи установить числа ***b*** и ***у***, для чего пронумеровать все ветви и узлы данной сложной цепи.
2, Показать на схеме направления (предположительные) токов в каждой из ветвей.
3, Определить, для каких (***у*** – 1) узлов нужно составить уравнение первого закона Кирхгофа и для каких контуров нужно составить уравнение второго закона Кирхгофа.
4, Для выбранных узловых точек схемы составить (***у*** – 1) уравнений по первому закону Кирхгофа:

$$\Sigma \boldsymbol{I} = 0.$$

Суммирование токов производится ***обязательно с учетом знака.***
5, Для выбранных замкнутых контуров составить ***m*** уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$\Sigma E = \Sigma \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{r}.$$

При составлении этих уравнений э. д. с. суммируются с учетом знака, а падения напряжения берутся со знаком плюс, если направление тока совпадает с направлением обхода контура, и наоборот.
6, Решить систему полученных уравнений, в результате чего определяются величины токов во всех ветвях цепи. **Если при решении та или иная величина тока получается со знаком минус**, то это значит, что фактическое направление тока в данной ветви обратно тому, которое было принято предварительно.
Для закрепления рассматриваемого порядка расчета сложной цепи с использованием законов Кирхгофа решим пример.
Пример. Дана сложная цепь, изображенная на рис.4. Зная E_1, E_2, E_3, r_1, r_2, r_3 необходимо определить токи в ветвях I_1, I_2 и I_3.

Решение,

1. Анализируя данную схему, устанавливаем, что в ней число ветвей ***b*** равно **трем**, а число узлов ***у*** равно **двум**.
2. Обозначим направление токов в ветвях. Это не значит, что направления будут именно такими, как мы предположили. Истинное направление токов определится в ходе решения задачи,

   Уравнения первого закона Кирхгофа необходимо составить для (***у*** – 1) узлов, или 2—1 = 1.

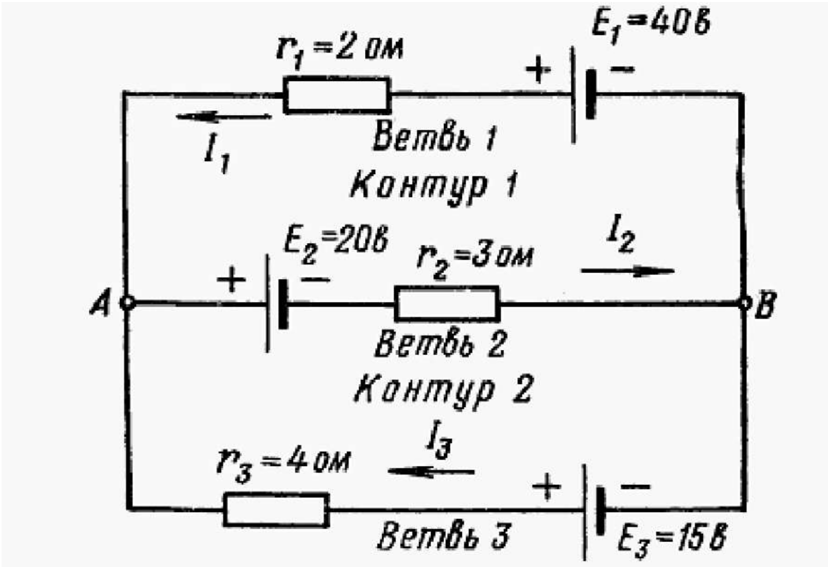

Рис.4. Сложная электрическая цепь

Количество уравнении второго закона Кирхгофа, которое надо составить для решения задачи будет равно

$$\boldsymbol{m = b — (y — 1) = 3 — (2 — I) = 3 — 1=2.}$$

3. Составим одно уравнение по первому закону Кирхгофа для узла *A:*

$$\Sigma I = I_1–I_2\cdot+ I_3 = 0. \quad (5)$$

4. Приняв направление обхода контуров против часовой стрелки, составим ***m*** = 2 уравнений для замкнутых контуров по второму закону Кирхгофа:
5.

$$– \text{для контура № 1: } E_1 – E_2 = I_1\cdot r_1+ I_2\cdot r_2; \quad (6)$$

$$– \text{для контура № 2: } E_2 – E_3 = – I_2\cdot r_2 – I_3\cdot r_3. \quad (7)$$

6. Решаем систему из **трех** уравнений (**5**, **6**, **7**), находим величины токов во всех ветвях цепи.

3. Содержание метода контурных токов

Для расчета сложных электрических цепей широко используют метод контурных токов, в основу которого положены расчетные (условные) контурные токи, замыкающиеся по смежным контурам разветвленных электрических цепей.

Контурный ток – ток, циркулирующий в пределах одного контура.

Метод контурных токов позволяет при составлении системы уравнений для расчета электрических цепей не записывать уравнения по первому закону Кирхгофа и тем самым уменьшить общее количество уравнений, необходимых для расчета. Истинные значения токов в ветвях электрической цепи определяются по значениям контурных токов.

В процессе расчета по этому методу определяют независимые замкнутые контуры и задаются условными положительными направлениями контурных токов. При этом во всех замкнутых контурах для упрощения процесса расчета целесообразно задавать контурным токам одинаковые положительные направления. Число уравнений при расчете по методу контурных токов равно числу контурных токов.

При составлении контурных уравнений по второму закону Кирхгофа для замкнутых контуров ЭДС источников питания принимаются положительными, если их направления совпадают с направлениями контурных токов, при несовпадении с контурным током их записывают со знаком «-». Со знаком «-» записывают напряжения, а также падения напряжений, направленные против контурного тока, а со знаком «+», если они совпадают с ним.

При этом величины контурных токов во внешних (не смежных) ветвях оказываются равными по значению токам в ветвях, которые нанесены на электрическую схему. Токи смежных ветвей равны разности контурных токов соседних контуров. При этом со знаком «+» записывается контурный ток, совпадающий с направлением тока в смежной ветви.

<u>Пример.</u> Задана цепь и ее расчетная схема замещения (рис. 5). Известны параметры элементов, значения э.д.с. источников. Требуется определить токи в ветвях.

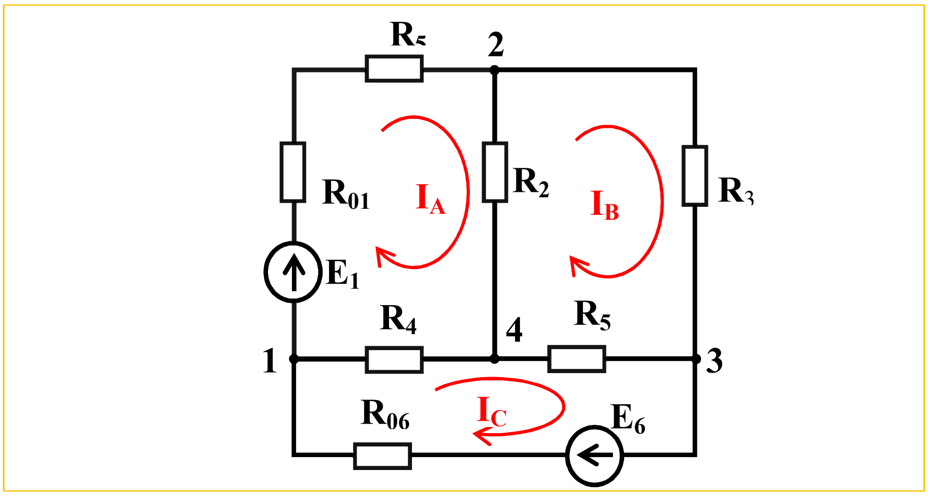

Рисунок 5. Сложная электрическая цепь

Алгоритм расчета

1. Вычерчиваем расчетную схему замещения (РСЗ), наносим обозначения.
2. Выбираем независимые контуры и *условные положительные* направления *контурных токов.*
3. Составляем систему контурных уравнений по 2-му закону Кирхгофа, *учитывая и падения напряжений на сопротивлениях контура от смежных токов*.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Левый контур:} & I_A\cdot(R_{01} + R_1 + R_2 + R_4) - I_B\cdot R_2 - I_C\cdot R_4 = E_1; \\ \text{Правый контур:} & I_B\cdot(R_2 + R_3 + R_5) - I_A\cdot R_2 - I_C\cdot R_5 = 0; \\ \text{Нижний контур:} & I_C\cdot(R_{02} + R_4 + R_5) - I_A\cdot R_4 - I_B\cdot R_5 = E_6.\end{array}\right\}$$

4. Решается система уравнений и определяются их корни, т.е контурные токи.
5. Поводится проверка правильности решения системы уравнений. Если контурный ток получился со знаком «-«, то его направление изменяется на противоположное.

6. $I_1 = I_A$; $I_3 = I_B$; $I_{02} = I_C$; $I_2 = I_A - I_B$; $I_4 = I_A - I_C$; $I_5 = I_B - I_C$.

7. Проверка правильности решения задачи в целом проводится:
   - по законам Кирхгофа;
   - по балансу мощностей.

4. Содержание метода узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов (узловых напряжений) предложен Максвеллом. Метод целесообразно использовать для расчета электрических цепей, содержащих несколько параллельных ветвей, присоединенных к паре узлов. Преимущество этого метода перед другими возрастает с увеличением числа параллельных ветвей электрических цепей. При этом определяется узловое напряжение, что позволяет достаточно просто определять токи в параллельных ветвях и другие величины, характеризующие подобные электрические цепи.

Метод основан на первом законе Кирхгофа и предполагает составление и решение так называемых «узловых» уравнений для всех узлов схемы, кроме одного, принимаемого за «опорный».

Опорный узел – любой произвольно выбранный узел, потенциал которого равен **нулю.**

Кроме этого вводятся понятия:

- потенциал узла;

– собственная проводимость узла.

Потенциал узла характеризует численное значение потенциала в конкретном узле схемы. Собственная проводимость узла представляет собой сумму проводимостей ветвей, связанных с данным узлом.

Узловые уравнения составляются по определенному правилу.

Правило составления узловых уравнений:

a) **левая часть**: берется ***потенциал узла***, для которого составляется уравнение, и умножается на ***собственную проводимость этого*** узла, т.е. на сумму проводимостей ***всех*** ветвей, подключенных к ***этому*** узлу. Далее вычитается произведение потенциала следующего узла на суммарную проводимость ветвей, соединяющих этот ***новый*** узел с рассматриваемым узлом. Такие произведения ***вычитаются*** для всех остальных узлов, кроме ***опорного***.

b) **правая часть** – алгебраическая сумма произведений э.д.с. ветвей, подходящих к ***исходному*** узлу (для которого составляется уравнение) на проводимости этих ветвей.
Знак каждого слагаемого определяется направлением э.д.с., по отношению к исходному узлу. Знак «+» - э.д.с. направлена к узлу; знак «–» - наоборот.

Пример. Задана цепь и её расчетная схема замещения (рис. 6). Известны параметры элементов, значения э.д.с. источников. Требуется определит токи в ветвях схемы.

Алгоритм решения:

1. Вычерчиваем расчетную схему замещения цепи.
2. В произвольном порядке нумеруем узлы в схеме: 1, 2, 3, 4 и выбираем узел 4 в качестве **опорного**.

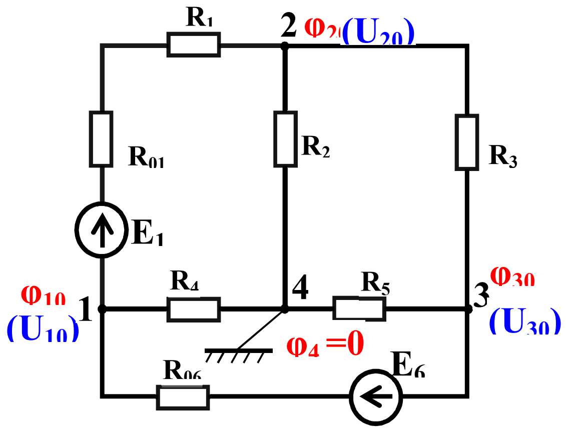

Рисунок 6. Сложная электрическая цепь

3. Выписываем потенциалы узлов : 1,2.3:

– узел 1- φ_{10};
– узел 2- φ_{20};
– узел 3- φ_{30}.

4. Выписываем собственные проводимости узлов:

– узел 1: $G_{10} = G_1 + G_4 + G_6 = \frac{1}{R_{01}+R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{06}}$;
– узел 2: $G_{20} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_{01}+R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$;
– узел 3: $G_{30} = G_3 + G_5 + G_6 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{06}}$.

5. Составляем узловые уравнения:

для **первого** узла

$$\varphi_{10}\,(G_1 + G_4 + G_6) - \varphi_{20}G_1 - \varphi_{30}G_6 = -E_1G_1 + E_6G_6;$$

для **второго** узла

$$\varphi_{20}\,(G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_{10}G_1 - \varphi_{30}G_3 = E_1G_1;$$

для **третьего** узла

$$\varphi_{30}\,(G_3 + G_5 + G_6) - \varphi_{10}G_6 - \varphi_{20}G_3 = -E_6G_.;$$

В этих уравнениях неизвестными являются узловые потенциалы (напряжения). Их находим решением уравнений. После определения узловых потенциалов определяются токи в ветвях схемы, например:

$$I_2 = \frac{U_{24}}{R_2} = \frac{\varphi_{20}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{\varphi_{20}-\varphi_{30}}{R_2}.$$

6. Для определения тока в ветви, содержащей э.д.с. она выделяется отдельно (рис. 7). Задаемся условным положительным направлением тока I_6 и условным положительным направлением обхода контура, записываем уравнение по 2-му закону Кирхгофа

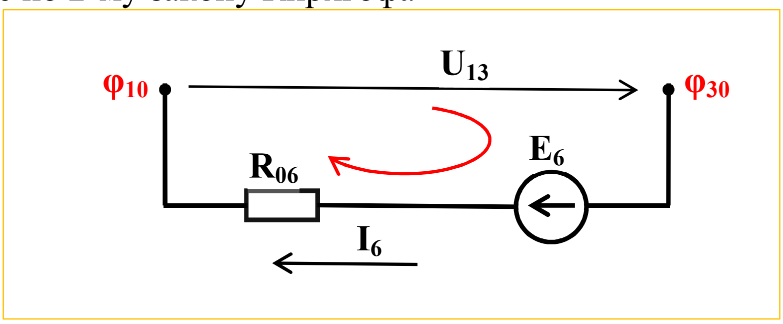

Рисунок 7. К определению тока в ветви, содержащей э.д.с.

$$U_{13} + I_{06}\, R_6 = E_6.$$

$$I_6 \ = \ \frac{E_6 - U_{13}}{I_{06}}.$$

7. Далее проводится проверка правильности решения задачи по балансу мощностей.