Лекция № 9

ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.

Учебные вопросы

1. Оригиналы и символы синусоидальных токов. Алгебраические операции над комплексными числами.
2. Представление производных и интегралов синусоидальных электрических величин комплексными числами.
3. Комплексные сопротивление и проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Комплексная мощность.

1. Оригиналы и символы синусоидальных токов. Алгебраические операции над комплексными числами

Как было показано в предыдущих разделах, расчет электрических цепей производится с помощью соотношений, в основе которых лежат законы Ома и Кирхгофа. Однако в отличие от цепей постоянного тока для цепей синусоидального тока применение этих законов имеет ряд ограничений. Так, законы Кирхгофа для реальных токов и напряжений можно записать только для мгновенных значений этих величин, каждая из которых представляет собой синусоидальную функцию времени. При подставлении функций мгновенных токов и напряжений в уравнения по законам Кирхгофа получается система уравнений, аналитическое решение которой крайне затруднительно. Поэтому расчет цепей синусоидального тока с использованием реальных токов и напряжений (то есть классическим методом) может производится только для простых цепей с использованием закона Ома. При этом основным содержанием расчета является определение полного сопротивления цепи в зависимости от ее конфигурации.

Для расчета сложных цепей синусоидального тока применяется символический (комплексный) метод, который основан на использовании комплексных чисел для изображения синусоидальных электрических величин.

Аналитически комплексное число $\underline{A}$ можно представить в следующих формах:

- в алгебраической $\underline{A} = a + jb$;
- в тригонометрической $\underline{A} = A\cos\varphi + jA\sin\varphi$;
- в показательной $\underline{A} = A\,e^{j\varphi}$,

где a, b - соответственно вещественная и мнимая части числа $\underline{A}$;

A, φ – соответственно модуль и аргумент комплексного числа;

j - мнимая единица ($j = \sqrt{-1}$).

Все формы комплексного числа тождественны. Переход от одной формы представления к другой осуществляется по формулам:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\ \varphi = arctg\,\frac{b}{a}\,;$$
$$a = A\,cos\,\varphi;\quad b = A\,sin\,\varphi.$$

Геометрически комплексное число $\underline{A} = Ae^{j\varphi}$ представляется вектором на комплексной плоскости (рис. 1).

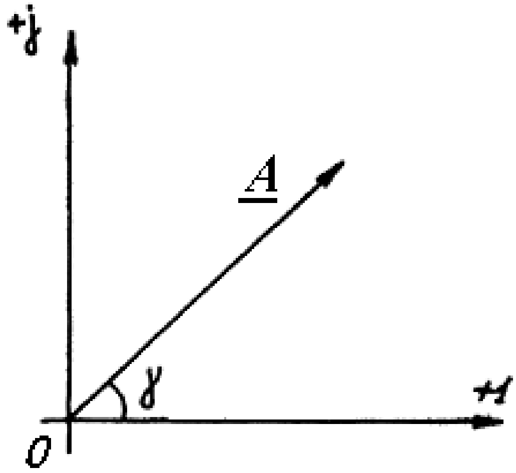

Рис.1. Изображение комплексного числа
на комплексной плоскости

Сложение и вычитание комплексных чисел рационально выполнять в алгебраической форме, а остальные операции - в показательной форме.

Рассмотрим синусоидальный ток:

$$i = I_m\,sin(\omega t + \psi_i).$$

Комплексный мгновенный синусоидальный ток есть комплексная величина, зависящая от времени, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и аргументу данного синусоидального тока:

$$i = I_m\ e^{j(\omega t + \psi_i)}.$$

Комплексная амплитуда синусоидального тока есть комплексная величина, не зависящая от времени, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе данного синусоидального тока:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

Комплексный действующий синусоидальный ток есть комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно действующему значению и начальной фазе синусоидального тока:

$$\dot{I} = I\ e^{j\psi_i}.$$

2. Представление производных и интегралов синусоидальных электрических величин комплексными числами

Установим связь между комплексным числом, изображающим исходную синусоидальную функцию времени , и комплексными числами, изображающими её интеграл и производную. Для этого рассмотрим последовательную электрическую цепь (рис. 2)

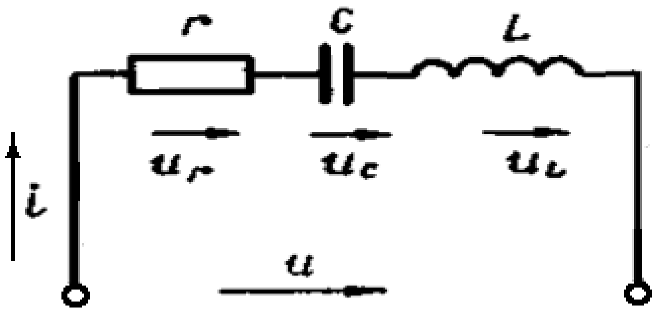

Рисунок 2. Последовательная электрическая цепь

По закону Кирхгофа для мгновенных значений запишется в виде

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,d\omega t.$$

В цепи протекает синусоидальный ток

$$i = I_m \cdot sin\ (\omega t + \psi_i)$$

Напряжение на катушке индуктивности

$$u = L\frac{di}{dt} = L\frac{d[I_m \sin(\omega t + \psi_i)]}{dt};$$

После дифференцирования получаем

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \ \cos\ (\omega t + \psi_\text{i}) = \omega I_m \ \sin\left(\omega t + \psi_\text{i} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Изображение sin-й функции ***производной*** от тока по времени, т.е. di/dt запишется в виде

$$\left(\widetilde{\frac{di}{dt}}\right) = \omega I_m \ e^{j\left(\omega t + \psi_\text{i} + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega I_m \ e^{j(\omega t + \psi_\text{i})} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \ =$$

и поскольку $e^{j\frac{\pi}{2}} \ = j,$ то в окончательном виде

$$\left(\widetilde{\frac{di}{dt}}\right) = j\omega\tilde{\imath}.$$

При этом $\tilde{\imath}$=$I_m \ e^{j(\omega t + \psi_\text{i})}$ есть изображение функции $i = I_m \ \cdot sin\ (\omega t + \psi_\text{i})$.

<u>Вывод:</u> операции ***дифференцирования*** синусоидального тока соответствует ***алгебраическая*** операция умножения комплексного числа на $j\omega$.

Изображение символа функции интеграла от тока i по времени т.е.

$$(\widetilde{\frac{1}{C}\int \imath \, d\omega t}) = \frac{1}{C}\int i \, d\omega t$$

$$\left(\widetilde{\frac{1}{C}\int \imath \, d\omega t}\right) = \frac{1}{C}\int I_m \ \cdot sin\ (\omega t + \psi_\text{i})\, d\omega t =$$

$$= -cos\ (\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{C\omega} sin\ (\omega t + \psi_i - 90^o) = \frac{I_m}{C\omega} e^{j\left(\omega t + \psi_\text{i} - \frac{\pi}{2}\right)} =$$

и поскольку $e^{-j\frac{\pi}{2}} \ = -j = \frac{1}{j}$, то в окончательном виде

$$= \frac{I_m}{C\omega} e^{j(\omega t + \psi_\text{i})} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \ = \frac{I_m}{jC\omega} e^{j(\omega t + \psi_\text{i})}.$$

Изображение sin-й функции, ***интеграла*** от тока по времени, т.е. $\left(\frac{1}{C}\widetilde{\int i\,d\omega t}\right)$ запишется в виде

$$\left(\frac{1}{C}\widetilde{\int \imath\,d\omega t}\right) = \frac{I_m}{jC\omega}\,e^{j(\omega t+\psi_i)}.$$

Вывод: таким образом, комплексное число, изображающее интеграл синусоидальной функции можно получить, разделив на $j\omega$ комплексное число, изображающее эту функцию, а комплексное число, изображающее производную от синусоидальной функции можно получить, умножив на $j\omega$ комплексное число, изображающее эту функцию.

3. Комплексные сопротивление и проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.

Рассмотрим произвольную цепь, состоящую из элементов r, L и C в которой под действием синусоидального напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ протекает синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Синусоидальным функциям u и i можем поставить в соответствие их изображениям (символы) в комплексной форме:

$$u = U_m \cdot \sin\,(\omega t + \psi_u) \rightarrow \dot{U} = U\,e^{j\psi_u}.$$

$$i = I_m \cdot \sin\,(\omega t + \psi_i) \rightarrow \dot{I} = I\,e^{j\psi_i}.$$

Разделим комплексное напряжение $\dot{U}$ на комплексный ток $\dot{I}$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dot{Z} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u-\psi_i)} = \mathrm{z}e^{j\varphi},$$

где $\dot{Z}$ – ***комплексное*** полное сопротивление цепи;

$z = \dfrac{U}{I}$ – модуль комплексного числа, определяющий величину полного сопротивления;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$ – угол сдвига фаз между напряжением и током цепи.

Из формулы для комплексного сопротивления $\dot{Z}$ находим комплекс тока $\dot{I}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}.$$

Полученное выражение представляет собой закон Ома для рассматриваемой цепи, записанный в комплексном виде. Комплексное полное сопротивление $\dot{Z}$ может быть представлено в другой форме:

$$\dot{Z} = ze^{j\varphi} = z\,cos\varphi + j\,z\,sins\varphi = r + jx.$$

Таким образом, действительная часть (r) комплексного полного сопротивления цепи представляет активное сопротивление, а коэффициент при мнимой части (x) – реактивное сопротивление цепи.

Комплексная ***проводимость*** цепи имеет вид:

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{Ie^{j\psi_i}}{Ue^{j\psi_u}} = Ye^{-j\varphi} = Ycos\varphi - j\,Y\,sin\varphi = g + jb.$$

где g – активная проводимость;
$в$ – реактивная проводимость.

Следовательно, представив полную проводимость в алгебраической форме, можно определить активную (g) и реактивную ($в$) проводимости цепи.

Когда реактивное сопротивление носит индуктивный характер ($x_L > x_C$), мнимая часть комплексного числа для полной проводимости $\dot{Y}$ имеет знак минус, при емкостном характере реактивного сопротивления ($x_L < x_C$) мнимая часть комплексного числа положительна.

Алгоритм расчета электрических цепей переменного синусоидального тока

1. Составляется расчетная схема замещения и определяются ее недостающие параметры, x_L и x_C.
2. Определяются сопротивления элементов цепи в комплексной форме.
3. Изображается расчетная схема замещения применительно к комплексным сопротивлениям.
4. Составляются уравнения в комплексной форме. При этом используются в комплексной форме законы Ома, Кирхгофа или все методы расчета цепей постоянного тока.
5. Рассчитывается цепь (решаются уравнения) относительно неизвестных комплексных токов (напряжений).

6. Делается переход от символов (комплексных чисел) к действующим значениям токов (напряжений).

7. Проверяется правильность расчета цепи путем составления баланса мощностей или с использованием законов Кирхгофа в комплексной форме.

Примеры расчета электрических цепей синусоидального тока комплексным методом

Последовательное соединение. При последовательном соединении элементов расчетная схема в комплексной форме имеет вид, изображенный на рис. **3**. В этой цепи через каждое из сопротивлений протекает один и тот же ток *I*.

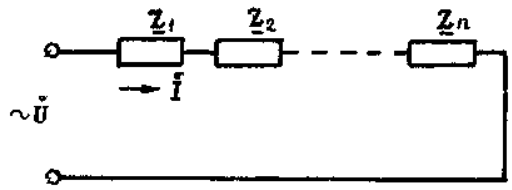

Рисунок 3. Схема к расчету последовательной цепи комплексным методом

Комплексное напряжение на зажимах этой цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n = \dot{I}\,\dot{Z}_1 + \dot{I}\,\dot{Z}_2 + \ldots + \dot{I}\,\dot{Z}_n = \dot{I}\,\dot{Z},$$

где $\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \ldots + \dot{Z}_n$ – общее сопротивление цепи.

Комплексный ток цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}.$$

Действующее значение тока цепи будет равно модулю комплекса тока $\dot{I}$.

Параллельное соединение. Общий вид схемы в комплексной форме при параллельном соединении элементов представлен на рис.4.

Ток в общей части цепи в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_2} + \cdots + \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_n} =$$

$$= \dot{U}\,(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \ldots + \dot{Y}_n) = \dot{U}\,\dot{Y},$$

где $\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \ldots + \dot{Y}_n) -$ общая проводимость цепи.

Действительные значения токов в цепи будут равны модулям комплексных токов $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n$.

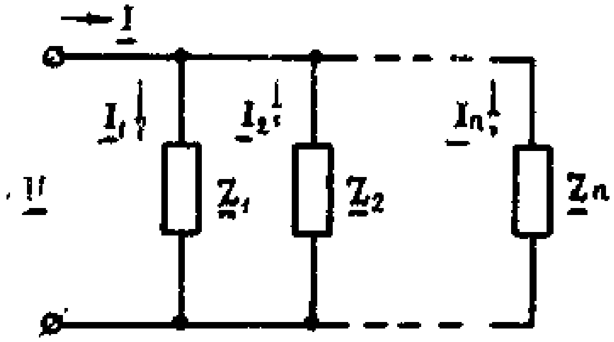

Рисунок 4 Схема к расчету параллельной цепи комплексным методом

В частном случае при параллельном соединении двух сопротивлений их эквивалентное комплексное сопротивление определяется по формуле

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

<u>Смешанное соединение</u>. Расчет смешанной цепи, схема замещения которой изображена на рис. 5,а, произведем в общем виде. Реактивные сопротивления элементов схемы:

$$x_{L1} = 2\pi f L_1, \quad x_{C1} = 1/2\pi f C_1, \quad x_{C2} = 1/2\pi f C_2.$$

Комплексные сопротивления:

$$\dot{Z}_1 = r_1 + \mathrm{j}(x_{L1} - x_{C1}); \quad \dot{Z}_0 = r_0 + \mathrm{j}x_0; \quad \dot{Z}_2 = r_2 - \mathrm{j}x_2;$$

Расчетная схема в комплексной форме принимает вид, изображенный на рис.5,б.

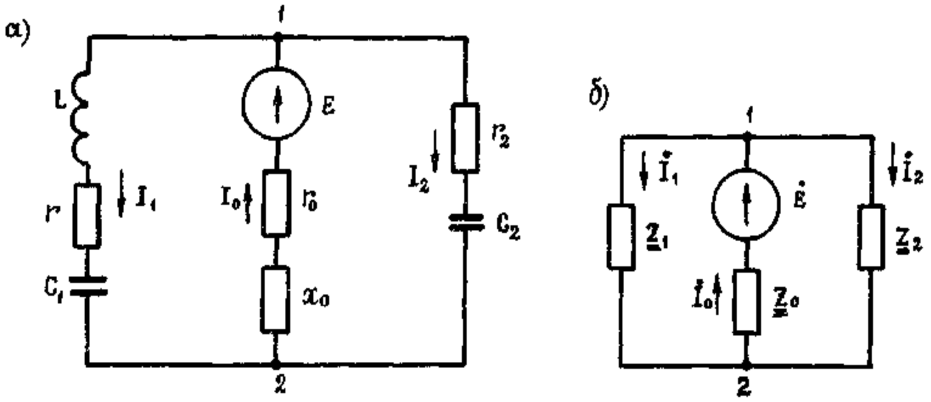

Рисунок 5 Схема к расчету смешанной цепи комплексным методом:
а – расчетная схема; б – расчетная схема в комплексной форме

Общий ток в комплексной форме

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_0 + \dfrac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}}.$$

Комплексное напряжение

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}_0 \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}.$$

Комплексные токи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{12}}{\dot{Z}_1}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{12}}{\dot{Z}_2},$$

Действующие значения токов I_0, I_1, I_2 равны соответственно модулям этих комплексных токов $\dot{I}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2$.